

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (Cours et TD)

1 Changement de numéraire

1.1 Motivation

Autre point de vue : exprimer les prix non pas en Euros, mais en Dollars, en nombre de zéro-coupons d'échéance T ...

Définition (abstraite). Un numéraire est une référence monétaire dont la valeur en Euros est un processus d'Itô strictement positif :

$$dX_t = X_t b_t^X dt + X_t \sigma_t^X d\widehat{W}_t.$$

➡ Marché dans le numéraire X , ou simplement **X -marché** : si S_t est la valeur en Euros d'un actif à l'instant t , sa valeur dans le X -marché est $\frac{S_t}{X_t}$.

Exemples.

- Numéraire cash : $X_t = \exp(\int_0^t r_s ds)$ (1€ capitalisé au taux sans risque).
- Numéraire cash étranger : change dollar-euro $1\$ = X_t \text{€}$.
- Numéraire forward de la date T : $X_t = B(t, T)$.
- S -marché. Prendre le titre S comme numéraire.

1.2 Premières propriétés

Questions

- Que deviennent les stratégies autofinancantes dans le X -marché ?
- Que devient la dynamique des titres dans le X -marché ?

Proposition. La notion de stratégie autofinancante est invariante par changement de numéraire

PREUVE. Il suffit de remarquer que, pour un portefeuille autofinancant

$V_t = \sum_{i=0}^d \delta_t^i S_t^i$, on a

$$\frac{V_t}{X_t} = \sum_{i=0}^d \delta_t^i \frac{S_t^i}{X_t}, \quad d\left(\frac{V_t}{X_t}\right) \stackrel{\text{Ito}}{=} \sum_{i=0}^d \delta_t^i d\left(\frac{S_t^i}{X_t}\right).$$

□

Proposition. L'actif S^i dans le X -marché a pour (vecteur) volatilité $\sigma_t^i - \sigma_t^X$.

PREUVE. Provient de la formule (voir cours 6) $\frac{d\left(\frac{U_t}{V_t}\right)}{\left(\frac{U_t}{V_t}\right)} = \frac{dU_t}{U_t} - \frac{dV_t}{V_t} + [\dots]dt$

□

2 Règle de valorisation dans un autre numéraire

Cas important : lorsque le numéraire X est un portefeuille autofinçant.

Exemples. Le cash $e^{\int_0^t r_s ds}$ en €, une action en €, un zéro-coupon en €.

2.1 Numéraire et changement de probabilité

Soit X_t la valeur, supposée strictement positive, d'un portefeuille autofinçant.

- ▶ La valeur de X exprimée dans le numéraire cash $e^{\int_0^t r_s ds}$ correspond à sa valeur actualisée $e^{-\int_0^t r_s ds} X_t$.
- ▶ Le **numéraire cash** est donc **associé à la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$** : $e^{-\int_0^t r_s ds} X_t$ est une $\mathbb{Q}$ -martingale.
- ▶ La dynamique de X peut s'écrire

$$\frac{dX_t}{X_t} = r_t dt + \sigma_t^X dW_t,$$

avec W un $\mathbb{Q}$ -MB et pour une certaine volatilité (en général, aléatoire) σ_t^X .

Cela donne $X_t = X_0 \exp \left(\int_0^t \sigma_s^X dW_s + \int_0^t \left(r_s - \frac{1}{2} |\sigma_s^X|^2 \right) ds \right)$.

Proposition (Probabilité risque-neutre du X -marché).

1. Le processus $L_t = e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{X_t}{X_0} = \exp \left(\int_0^t \sigma_s^X dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_s^X|^2 ds \right)$ définit donc une $\mathbb{Q}$ -martingale avec $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[L_T] = L_0 = 1$.
2. La probabilité $\mathbb{Q}^X$ définie par sa densité par rapport à $\mathbb{Q}$

$$\frac{d\mathbb{Q}^X}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = L_T$$

est telle que $W_t^X = W_t - \int_0^t (\sigma_s^X)^\top ds$ est un $\mathbb{Q}^X$ -mouvement brownien.

3. Si un actif risqué Y en € a pour dynamique

$$\frac{dY_t}{Y_t} = r_t dt + \sigma_t^Y dW_t$$

alors la valeur $Y_t^X = \frac{Y_t}{X_t}$ dans le numéraire X a pour dynamique

$$\frac{dY_t^X}{Y_t^X} = [\sigma_t^Y - \sigma_t^X] dW_t^X.$$

En particulier : le processus Y_t^X est une martingale sous $\mathbb{Q}^X$.

2.2 Application au pricing

Quelle règle de valorisation dans le X -marché ? $\Rightarrow$ Valorisation risque-neutre mais adaptée au numéraire

Théorème. Avec les notations précédentes, le prix comptant $C_t^X(\Phi_T)$ à la date t dans le numéraire X d'un flux Φ_T répliquable est égal à

$$C_t^X(\Phi_T, T) := \frac{C_t(\Phi_T, T)}{X_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^X} \left[\frac{\Phi_T}{X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

En d'autres termes : les prix dans le numéraire X sont des $\mathbb{Q}^X$ -martingales.

Remarques.

1. Rappel : La probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ est associée au numéraire cash $X_t = \exp(\int_0^t r_s ds)$ ($\mathbb{Q}^X = \mathbb{Q}$).
2. Le théorème ci-dessus fournit une règle de calcul : dans certains cas, l'espérance $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^X}$ sous $\mathbb{Q}^X$ peut être plus simple à calculer que l'espérance $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ sous la mesure risque-neutre.

Pour les calculs de prix sous $\mathbb{Q}^X$, utiliser que $\frac{dY_t^X}{Y_t^X} = [\sigma_t^Y - \sigma_t^X]dW_t^X$.

2.3 Un cas particulier : la probabilité forward-neutre $\mathbb{Q}^T$

Exemple important où le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T :

$$X_t = B(t, T), \quad \mathbb{Q}^X = \mathbb{Q}^T, \quad \sigma_t^X = \Gamma(t, T),$$

où $\Gamma(t, T)$ est la volatilité en t du zéro-coupon de maturité T .

Alors puisque $B(T, T) = 1$, on a $C_t^X(\Phi_T, T) = \frac{C_t(\Phi_T, T)}{B(t, T)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} [\Phi_T | \mathcal{F}_t]$.

Remarques.

- Evite le problème du facteur d'actualisation (éventuellement aléatoire) $e^{-\int_t^T r_s ds}$.
- Donne directement le prix forward du flux Φ_T d'échéance T :

$$C_t^X(\Phi_T, T) = F_t(\Phi_T, T).$$

- Pour calculer le prix, besoin de la dynamique des prix forward des sous-jacents. Mais
 - Un prix forward (réglé en T) est une $\mathbb{Q}^T$ -martingale
 - On a donc besoin juste de la vol du prix forward ($\vec{\sigma}_t^X - \vec{\Gamma}(t, T)$)

2.4 Formule de Black (avec taux d'intérêt stochastique)

Théorème. En notant $X_t = B(t, T)$ et en supposant les dynamiques

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) dW_t \quad \text{sous } \mathbb{Q}$$

et

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t \quad \text{sous } \mathbb{Q},$$

alors si la différence $\Gamma(t, T) - \sigma_t$ est déterministe, le prix d'un Call de strike K sur S vaut

$$C_t((S_T - K)^+, T) = S_t \mathcal{N}(d_1(t)) - K B(t, T) \mathcal{N}(d_0(t)).$$

où $d_1(t) = d_1(T - t, S_t, KB(t, T), \sigma^{BS} = \bar{\sigma}_{t, T})$, analoguement pour $d_0(t)$, et

$$\bar{\sigma}_{t, T} = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T |\sigma_s - \Gamma(s, T)|^2 ds}.$$

► L'option se couvre avec l'achat de $\mathcal{N}(d_1(t))$ actifs S_t et la vente de $K\mathcal{N}(d_0(t))$ zéro-coupons $B(t, T)$.

Autre exemple : option d'échange $(S_T^1 - KS_T^2)_+$. Utiliser le numéraire S^2 .

2.5 Appendice : quelques résultats sous-jacents en calcul stochastique

1. Si H_t est une $\mathbb{Q}$ -martingale positive et $H_0 = 1$, alors $\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = H_t$ définit une nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$.
2. Formule de Bayes pour l'espérance conditionnelle : pour toute variable aléatoire Z_T - $\mathcal{F}_T$ mesurable

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}} [Z_T \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{H_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [H_T Z_T \mid \mathcal{F}_t].$$

3. M est une $\mathbb{Q}$ -martingale si et seulement si $\frac{M}{H}$ est une $\tilde{\mathbb{Q}}$ -martingale